



LISTA DE EXERCÍCIOS - Por que alguns limites são fáceis e outros exigem fatoração?

1. Um aplicativo de monitoramento de corrida utiliza a função $f(x) = 3x + 8$ para representar uma determinada medida relacionada ao desempenho de um atleta. Para analisar o comportamento dessa medida quando x se aproxima de 4, determine o limite de $f(x)$ quando x tende a 4.
2. Uma empresa utiliza a função $C(x) = x^2 + 2x + 5$ para representar um indicador de custo em função da quantidade x de produtos fabricados. Qual é o limite de $C(x)$ quando x se aproxima de 3?
3. Durante uma simulação de movimento, a posição de um objeto é representada pela função $P(t) = t^2 - 4t + 7$, em que t representa o tempo em segundos. Determine o limite de $P(t)$ quando t se aproxima de 5.
4. Um sistema de controle de temperatura utiliza a expressão $T(x) = 5x - 2$ para representar uma medida interna do equipamento. Qual é o limite dessa expressão quando x se aproxima de 6?
5. Em um programa de computador, uma determinada variável é representada pela expressão $(x^2 - 16) / (x - 4)$. O sistema precisa analisar o comportamento dessa expressão quando x se aproxima de 4. Determine o limite, mostrando como a fatoração pode ser utilizada para resolver a indeterminação.
6. Um engenheiro está analisando uma expressão matemática utilizada em uma simulação de estrutura. A expressão é $(x^2 - 25) / (x - 5)$. Determine o limite quando x se aproxima de 5.



7. Uma empresa utiliza um modelo matemático em que determinado indicador é representado por $(x^2 + 7x + 12) / (x + 3)$. Para analisar o comportamento do indicador próximo de $x = -3$, determine o limite da expressão. Utilize fatoração quando necessário.
8. Em uma simulação computacional, um indicador é calculado pela expressão $(x^2 + 2x - 15) / (x - 3)$. O programa precisa descobrir para qual valor o indicador se aproxima quando x fica cada vez mais próximo de 3. Determine esse limite utilizando uma estratégia algébrica adequada.
9. Em um modelo matemático usado para estudar o comportamento de uma grandeza próxima de determinado ponto, aparece a expressão $(x^2 - 9x + 20) / (x - 4)$. Ao substituir $x = 4$, surge uma indeterminação. Determine o limite quando x se aproxima de 4, identificando primeiro a fatoração adequada e realizando todas as simplificações necessárias.
10. Um software de engenharia utiliza o indicador $l(x) = (x^3 - 4x^2 + 4x) / (x^2 - 4x)$ para analisar o comportamento de uma grandeza quando x se aproxima de 4. A substituição direta produz uma indeterminação. Determine o limite da expressão quando x se aproxima de 4, fatorando numerador e denominador e simplificando a expressão antes de realizar uma nova substituição.



RESOLUÇÕES

Questão 1.

Como a expressão é um polinômio e não apresenta nenhuma divisão por zero, podemos utilizar a substituição direta.

Fórmula: $\lim_{x \rightarrow 4} (3x + 8)$

Substituindo $x = 4$:

$$3 \cdot 4 + 8 = 12 + 8$$

$$3 \cdot 4 + 8 = 20$$

Resposta: o limite é 20.

Questão 2.

A função é um polinômio, portanto podemos calcular o limite por substituição direta.

Fórmula: $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 2x + 5)$

Substituindo $x = 3$:

$$3^2 + 2 \cdot 3 + 5$$

$$9 + 6 + 5 = 20$$

Resposta: o limite é 20.





Questão 3.

Como a expressão é um polinômio, basta substituir o valor para o qual t se aproxima.

Fórmula: $\lim_{t \rightarrow 5} (t^2 - 4t + 7)$

Substituindo $t = 5$:

$$5^2 - 4 \cdot 5 + 7$$

$$25 - 20 + 7$$

$$25 - 20 = 5$$

$$5 + 7 = 12$$

Resposta: o limite é 12.

Questão 4.

A expressão é uma função polinomial de primeiro grau. Portanto, podemos utilizar a substituição direta.

Fórmula: $\lim_{x \rightarrow 6} (5x - 2)$

Substituindo $x = 6$:

$$5 \cdot 6 - 2$$

$$30 - 2 = 28$$

Resposta: o limite é 28.





Questão 5.

Primeiro, fazemos a substituição direta.

$$\text{Fórmula: } \lim_{x \rightarrow 4} [(x^2 - 16) / (x - 4)]$$

Substituindo $x = 4$:

$$(4^2 - 16) / (4 - 4)$$

$$(16 - 16) / 0$$

$$0 / 0$$

Temos uma indeterminação. Portanto, precisamos fatorar o numerador.

$x^2 - 16$ é uma diferença de dois quadrados:

$$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$$

$$\text{Assim: } [(x - 4)(x + 4)] / (x - 4)$$

Para x diferente de 4, podemos simplificar o fator $x - 4$:

$$x + 4$$

Agora podemos calcular o limite por substituição direta:

$$4 + 4 = 8$$

Resposta: o limite é 8.

Questão 6.

Primeiro, tentamos a substituição direta.

$$\text{Fórmula: } \lim_{x \rightarrow 5} [(x^2 - 25) / (x - 5)]$$

Substituindo $x = 5$:

$$(5^2 - 25) / (5 - 5)$$

$$(25 - 25) / 0$$

$$0 / 0$$





Apareceu uma indeterminação. Precisamos fatorar o numerador.

$x^2 - 25$ é uma diferença de dois quadrados:

$$x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$$

$$\text{Então: } [(x - 5)(x + 5)] / (x - 5)$$

Simplificando o fator $x - 5$: $x + 5$

Agora fazemos a substituição direta: $5 + 5 = 10$

Resposta: o limite é 10.

Questão 7.

A substituição direta produz: $[(-3)^2 + 7 \cdot (-3) + 12] / (-3 + 3)$

$$= [9 - 21 + 12] / 0 = 0 / 0$$

Temos uma indeterminação. Portanto, devemos fatorar o numerador.

Precisamos encontrar dois números cujo produto seja 12 e cuja soma seja 7. Esses números são 3 e 4.

$$\text{Assim: } x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

A expressão fica: $[(x + 3)(x + 4)] / (x + 3)$

Simplificando: $x + 4$

Agora fazemos a substituição direta: $-3 + 4 = 1$

Resposta: o limite é 1.





Questão 8.

Primeiro, verificamos o que acontece com a substituição direta.

Fórmula: $\lim_{x \rightarrow 3} [(x^2 + 2x - 15) / (x - 3)]$

Substituindo $x = 3$:

$$(3^2 + 2 \cdot 3 - 15) / (3 - 3)$$

$$= (9 + 6 - 15) / 0$$

$$= 0 / 0$$

Temos uma indeterminação.

Agora fatoramos o numerador. Precisamos de dois números cujo produto seja -15 e cuja soma seja 2. São eles 5 e -3.

Portanto: $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$

Substituindo na expressão: $[(x + 5)(x - 3)] / (x - 3)$

Simplificando o fator $x - 3$: $x + 5$

Agora fazemos a substituição direta: $3 + 5 = 8$

Resposta: o limite é 8.

Questão 9.

Começamos pela substituição direta:

Fórmula: $\lim_{x \rightarrow 4} [(x^2 - 9x + 20) / (x - 4)]$

Substituindo $x = 4$: $(4^2 - 9 \cdot 4 + 20) / (4 - 4)$

$$= (16 - 36 + 20) / 0 = 0 / 0$$

Temos uma indeterminação.





Agora precisamos fatorar o numerador.

Precisamos encontrar dois números cujo produto seja 20 e cuja soma seja -9. Esses números são -4 e -5.

$$\text{Assim: } x^2 - 9x + 20 = (x - 4)(x - 5)$$

A expressão passa a ser: $[(x - 4)(x - 5)] / (x - 4)$

Simplificando o fator $x - 4$: $x - 5$

Agora podemos fazer a substituição direta: $4 - 5 = -1$

Portanto, embora a expressão original apresente uma indeterminação em $x = 4$, seu comportamento quando x se aproxima de 4 é bem definido.

Resposta: o limite é -1.

Questão 10.

Primeiro, tentamos a substituição direta:

$$\text{Fórmula: } \lim_{x \rightarrow 4} [(x^3 - 4x^2 + 4x) / (x^2 - 4x)]$$

$$\text{Substituindo } x = 4: (4^3 - 4 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4) / (4^2 - 4 \cdot 4)$$

$$= (64 - 64 + 16) / (16 - 16) = 16 / 0$$

Nesse caso, não aparece 0/0. A substituição direta indica uma divisão por zero, portanto precisamos analisar a estrutura da expressão antes de concluir.

Vamos fatorar o numerador:

$$x^3 - 4x^2 + 4x$$

Colocando x em evidência:

$$x(x^2 - 4x + 4)$$

O trinômio pode ser fatorado como:

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

$$\text{Portanto: } x^3 - 4x^2 + 4x = x(x - 2)^2$$





Agora fatoramos o denominador:

$$x^2 - 4x = x(x - 4)$$

Assim, a expressão fica:

$$[x(x - 2)^2] / [x(x - 4)]$$

Podemos simplificar o fator x , desde que x seja diferente de 0:

$$(x - 2)^2 / (x - 4)$$

Agora analisamos novamente o comportamento quando x se aproxima de 4.

Substituindo $x = 4$:

$$(4 - 2)^2 / (4 - 4)$$

$$= 2^2 / 0$$

$$= 4 / 0$$

A expressão continua apresentando divisão por zero. Portanto, diferentemente dos exercícios anteriores, a fatoração não elimina completamente o problema.

Nesse caso, não há um valor finito para o qual a expressão se aproxime quando x tende a 4. A expressão cresce sem limite por um lado e assume valores negativos sem limite pelo outro, pois o denominador $x - 4$ muda de sinal ao atravessar $x = 4$. Assim, o limite bilateral não existe como um número real finito.

Resposta: o limite não existe como um número real finito.

